3. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

С. Азарми

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

195.258 *@gmail.com*

МНОГООБРАЗИЯ НАД ГРАССМАНОВЫМИ АЛГЕБРАМИ $\Lambda(2)$ и $\Lambda(3)$

Пусть $\Lambda(N) = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \Lambda^k(N)$ — грассманова алгебра векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $\Lambda_0(N) = \bigoplus\limits_{0\leqslant 2k\leqslant N} \Lambda^{2k}(N)$, $\Lambda_1(N) = \bigoplus\limits_{1\leqslant 2k+1\leqslant N} \Lambda^{2k+1}(N)$. Пусть $\{e_1, \dots e_N\}$ — стандартный репер пространства $\mathbb{R}^N$. Тогда $\Lambda^k(N)$ есть вещественное векторное пространство с репером $\{e_{a_1\dots a_k} = e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_k}\}$, где $1 \leqslant a_1 < \dots < a_k \leqslant N$. Координаты векторов пространства $\Lambda^k(N)$ относительно этого репера будем обозначать $x_{a_1\dots a_k}$.

$\Lambda^{m,n}(N) = \Lambda_0^m(N) \times \Lambda_1^n(N)$ есть $2^{(N-1)(n+m)}$-мерное векторное пространство, координаты векторов которого будем обозначать $(x^k_{a_1\dots a_{2p}}, y^\alpha_{a_1\dots a_{2q+1}})$, где $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$.

$\Lambda_0(N)$ есть конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{R}$, и $\Lambda^{m,n}(N)$ есть $\Lambda_0(N)$-модуль. Поэтому определена категория $\Lambda_0(N)$-многообразий, моделируемых на $\Lambda^{m,n}(N)$. Будем называть объекты этой категории (m, n)-мерными многообразиями над $\Lambda_0(N)$. Отметим, что общая теория многообразий над алгебрами изложена в [1], [2]; многообразия над $\Lambda_0(N)$ были введены в [3], также см. [4], [5].

Утверждение 1. *Если на гладком многообразии M существует структура (m,n)-мерного многообразия над алгеброй $\Lambda_0(2)$, то M допускает атлас с координатами $(x_0^k, x_{12}^k, y_1^\alpha, y_2^\alpha)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, и функциями замены координат*

$$\begin{aligned} \overline{x}_0^k &= f_0^k(x_0^i), \qquad \overline{x}_{12}^k = \frac{\partial f_0^k}{\partial x_0^j} x_{12}^j + g_{12}^k(x_0^i, y_1^\alpha, y_2^\alpha), \\ \overline{y}_1^\lambda &= h_1^\lambda(x_0^i, y_1^\alpha, y_2^\alpha), \qquad \overline{y}_2^\lambda = h_2^\lambda(x_0^i, y_1^\alpha, y_2^\alpha), \end{aligned}$$

где $f_0^k(x_0^i)$, $g_{12}^k(x_0^i, y_1^\alpha, y_2^\alpha)$, $h_a^\lambda(x_0^i, y_1^\alpha, y_2^\alpha)$ — произвольные гладкие функции и $1 \leqslant i,j,k \leqslant m$, $1 \leqslant \alpha, \lambda \leqslant n$.

Утверждение 2. *Если на гладком многообразии M существует структура (m,n)-мерного многообразия над алгеброй $\Lambda_0(3)$, то M допускает атлас с координатами*

$$(x_0^k, x_{12}^k, x_{13}^k, x_{23}^k, y_1^\alpha, y_2^\alpha, y_3^\alpha, y_{123}^\alpha)$$

и функциями замены координат

$$\begin{aligned} \overline{x}_0^k &= f_0^k(x_0^k), \\ \overline{x}_{ab}^k &= \frac{\partial f_0^k}{\partial x_0^j} x_{ab}^j + g_{ab}^k(x_0^k, y_1^\alpha, y_2^\alpha, y_3^\alpha) \quad (1 \leqslant a < b \leqslant 3), \\ \overline{y}_a^\gamma &= h_\alpha^\gamma(x_0^i) y_a^\alpha + g_a^\gamma(x_0^i) \quad (a = 1,2,3), \\ \overline{y}_{123}^\gamma &= h_\alpha^\gamma(x_0^i) y_{123}^\alpha + g_{123}^\gamma(x_0^i, y_1^\beta, y_2^\beta, y_3^\beta), \end{aligned}$$

где f_0^k, g_{ab}^k, h_α^γ, g_a^γ, g_{ab}^γ, g_{123}^γ — произвольные гладкие функции указанных аргументов, $1 \leqslant i,j,k \leqslant m$, $1 \leqslant \alpha, \gamma \leqslant n$, $a, b = 1,2,3$.

Если A есть коммутативная ассоциативная алгебра с единицей, I — идеал в A и $\mathcal{M}$ — A-модуль, то $I \cdot \mathcal{M} = \{a_1 m_1 + + \cdots a_p m_p | a_i \in I, m_i \in \mathcal{M}\}$ и $Ann(I) = \{m \in \mathcal{M} | am = 0 \ \forall a \in I\}$

являются подмодулями, инвариантными относительно любого A-линейного изоморфизма модуля $\mathcal{M}$. Соответственно, любой идеал $I \subset A$ определяет два слоения $\mathcal{F}_{I \cdot \mathcal{M}}$ и $\mathcal{F}_{Ann(I)}$ на каждом A-многообразии, моделируемом на $\mathcal{M}$ [2].

Алгебра $\Lambda_0(2)$ (изоморфная алгебре дуальных чисел) имеет единственный нетривиальный идеал I, который натянут на элемент e_{12}.

Утверждение 3. *Каждое (m,n)-мерное $\Lambda(2)$-многообразие допускает два слоения $\mathcal{F}_{I \cdot \Lambda^{m,n}(2)} \subset \mathcal{F}_{Ann(I)}$. В координатах $(x_0^k, x_{12}^k, y_1^\alpha, y_2^\alpha)$ слои слоения $\mathcal{F}_{I \cdot \Lambda^{m,n}(2)}$ задаются уравнениями $x_0^k = \mathrm{const}$, $y_1^\alpha = \mathrm{const}$, $y_2^\alpha = \mathrm{const}$, а слои слоения $\mathcal{F}_{Ann(I)}$ уравнениями $x_0^k = \mathrm{const}$. При этом $\mathcal{F}_{I \cdot \Lambda^{m,n}(2)}$ является аффинным слоением.*

В алгебре $\Lambda_0(3)$ любое подпространство в $I = \mathrm{span}\,\{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ является идеалом, поэтому (m,n)-мерное $\Lambda_0(3)$-многообразие, вообще говоря, допускает бесконечное количество слоений.

Утверждение 4. *Каждый двумерный идеал $J \subset I$ алгебры $\Lambda_0(3)$ определяет на (m,n)-мерном $\Lambda_0(3)$-многообразии M аффинное слоение $\mathbb{F}_{a_1 a_2 a_3}$, которое в картах $\Lambda_0(3)$-атласа задается уравнениями $x_0^k = \mathrm{const}$, $y_a^\alpha = \mathrm{const}$, $a_1 x_{23}^k + a_2 x_{13}^k + a_3 x_{12}^k = \mathrm{const}$, где a_1, a_2, a_3 — константы, определяемые идеалом J.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 264 с.

2. Шурыгин В. В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 19. – С. 3-22.

3. Азарми С. *Многообразия над грассмановыми алгебрами* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 116-118.

4. Jadczyk A., Pilch K. *Superspace and supersymmetries* // Commun. Math. Phys. – 1980. – V. 78. – P. 373-390.

5. Владимиров В. С., Волович И. В. *Суперанализ.* I. *Дифференциальное исчисление* // Теор. и матем. физика. – 1984. – Т. 59. – № 1. – С. 3-27.

Л. А. Александрова

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, tymila@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАВНОГО КОНТУРА ОСНОВАНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ВОДОУПОРА

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация (по закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$) под водонепроницаемым подземным контуром заглубленной плотины $ABCC_1B_1A_1$ (см. рис.). Пусть контур основания плотины AA_1 состоит из двух вертикальных отрезков AB и A_1B_1 одинаковой длины d_1, среднего горизонтального отрезка CDC_1 длиной $2l_1$ и примыкающих к ним дуг кривых BC и B_1C_1 с постоянной величиной $|w| = v_0$ скорости их обтекания. Снизу область течения ограничена криволинейным